

LAPLACEOVA TRANSFORMACE

PŘEDNÁŠKA 11-12

EVA FEUERSTEIN

LAPLACEOVA TRANSFORMACE

Definice 1

Nechť $f(t)$ je komplexní funkce reálné proměnné a nechť integrál $\int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt$ existuje a má konečnou hodnotu alespoň pro jedno komplexní číslo p .

Potom **Laplaceovým obrazem funkce $f(t)$** budeme rozumět integrál

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt.$$

Funkci $f(t)$ nazýváme **předmětem**.

Laplaceův obraz je funkce komplexní proměnné p , $p = \operatorname{Re} p + i \operatorname{Im} p$.

Definičním oborem Laplaceova obrazu je množina všech komplexních čísel, pro která konverguje výše uvedený integrál.

PŘÍKLAD 1

Laplaceův obraz funkce $f(t) = 1$

Podle definice je

$$\mathcal{L}\{1\} = \int_0^{\infty} 1 e^{-pt} dt = \lim_{B \rightarrow +\infty} \int_0^B e^{-pt} dt = \frac{1}{-p} \lim_{B \rightarrow +\infty} e^{-pB} - \frac{1}{-p}$$

Je-li p komplexní číslo, pro které platí $\text{Re } p > 0$, je $\lim_{B \rightarrow +\infty} e^{-pB} = 0$

a tedy

$$\mathcal{L}\{1\} = \int_0^{\infty} 1 e^{-pt} dt = \frac{-1}{p} \underbrace{\lim_{B \rightarrow +\infty} e^{-pB}}_0 - \frac{1}{-p} = \frac{1}{p}$$

Laplaceův obraz funkce $f(t) = 1$ je roven $\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{p}$.

PŘÍKLAD 2

Laplaceův obraz funkce $f(t) = e^{at}$, kde a je komplexní konstanta.
Podle definice je

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \int_0^{\infty} e^{at} e^{-pt} dt = \lim_{B \rightarrow +\infty} \int_0^B e^{(a-p)t} dt = \frac{1}{a-p} \lim_{B \rightarrow +\infty} e^{(a-p)B} - \frac{1}{a-p}$$

Je-li p komplexní číslo, pro které platí $\text{Re } p > \text{Re } a$, je $\lim_{B \rightarrow +\infty} e^{(a-p)B} = 0$
a tedy

$$\lim_{B \rightarrow +\infty} \int_0^B e^{(a-p)t} dt = \frac{-1}{p-a} \underbrace{\lim_{B \rightarrow +\infty} e^{(a-p)B}}_0 + \frac{1}{p-a} = \frac{1}{p-a}$$

Laplaceův obraz funkce e^{at} je roven $\mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{p-a}$.

PŘÍKLAD 3

Laplaceův obraz funkce $\cos t$.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\cos t\} &= \int_0^\infty \cos t \, e^{-pt} \, dt = \left| \begin{array}{ll} u = \cos t & u' = -\sin t \\ v' = e^{-pt} & v = -\frac{1}{p} e^{-pt} \end{array} \right| = \\ &= -\frac{1}{p} \cos t \, e^{-pt} \Big|_0^\infty - \frac{1}{p} \int_0^\infty \sin t \, e^{-pt} \, dt = \left| \begin{array}{ll} u = \sin t & u' = \cos t \\ v' = e^{-pt} & v = -\frac{1}{p} e^{-pt} \end{array} \right| \\ &= -\frac{1}{p} \cos t \, e^{-pt} \Big|_0^\infty - \frac{1}{p} \left(-\frac{1}{p} \sin t \, e^{-pt} \Big|_0^\infty - \frac{1}{p} \int_0^\infty -\cos t \, e^{-pt} \, dt \right) = \\ \underbrace{\int_0^\infty \cos t \, e^{-pt} \, dt}_I &= -\frac{1}{p} \cos t \, e^{-pt} \Big|_0^\infty + \frac{1}{p^2} \sin t \, e^{-pt} \Big|_0^\infty - \frac{1}{p^2} \underbrace{\int_0^\infty \cos t \, e^{-pt} \, dt}_I\end{aligned}$$

PŘÍKLAD 3 – POKRAČOVÁNÍ

$$I + \frac{1}{p^2} \cdot I = \frac{p^2 + 1}{p^2} \cdot I = -\frac{1}{p} \cos t e^{-pt} \Big|_0^\infty + \frac{1}{p^2} \sin t e^{-pt} \Big|_0^\infty$$

Je-li p komplexní číslo, pro které platí $\text{Re } p > 0$, potom

$$\lim_{B \rightarrow +\infty} \cos t e^{-pB} = 0, \quad \lim_{B \rightarrow +\infty} \sin t e^{-pB} = 0$$

a tedy

$$\frac{p^2 + 1}{p^2} \cdot I = -\frac{1}{p} (0 - 1) + \frac{1}{p^2} (0 - 0) \Rightarrow I = \frac{p}{p^2 + 1}$$

Laplaceův obraz funkce $\cos t$ je roven $\mathcal{L}\{\cos t\} = \frac{p}{p^2 + 1}$.

PŘÍKLAD 4

Podobně můžeme z definice určit Laplaceův obraz funkce $\sin t$

$$\mathcal{L}\{\sin t\} = \int_0^{\infty} \sin t e^{-pt} dt = \dots \text{ 2 x per partes } \dots$$

$$= -\frac{1}{p} \sin t e^{-pt} \Big|_0^{\infty} + \frac{1}{p^2} \cos t e^{-pt} \Big|_0^{\infty} - \frac{1}{p^2} \int_0^{\infty} \sin t e^{-pt} dt$$

$$\underbrace{\int_0^{\infty} \sin t e^{-pt} dt}_I = -\frac{1}{p} \sin t e^{-pt} \Big|_0^{\infty} + \frac{1}{p^2} \cos t e^{-pt} \Big|_0^{\infty} - \frac{1}{p^2} \underbrace{\int_0^{\infty} \sin t e^{-pt} dt}_I$$

Analogicky, platí-li $\text{Re } p > 0$, dostáváme

$$\frac{p^2 + 1}{p^2} \cdot I = -\frac{1}{p} (0 - 0) + \frac{1}{p^2} (1 - 0) \Rightarrow I = \frac{1}{p^2 + 1}$$

Laplaceův obraz funkce $\sin t$ je roven $\mathcal{L}\{\sin t\} = \frac{1}{p^2 + 1}$.

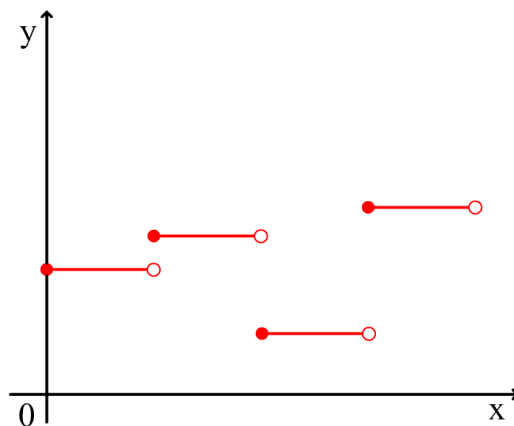
PŘEDMĚT STANDARTNÍHO TYPU

Definice 2

Říkáme, že **funkce f má v bodě x nespojitost prvního druhu**, jestliže není v bodě x spojitá, má ale v bodě x **konečné** jednostranné limity zleva i zprava.

Definice 3

Funkci $f(t)$ definovanou na $\langle a, b \rangle$, kde a, b jsou konečná čísla, nazýváme **po částech spojitou**, má-li v $\langle a, b \rangle$ nejvýše konečný počet bodů nespojitosti prvního druhu.



PŘEDMĚT STANDARTNÍHO TYPU

Definice 4

Bod x se nazývá **hromadným bodem** množiny M jestliže v každém jeho okolí leží alespoň jeden bod množiny M , který je různý od x .

Jinými slovy: bod x je hromadným bodem množiny M právě tehdy, když v jeho okolí leží nekonečně mnoho bodů množiny M .

Definice 5

Říkáme, že funkce $f(t)$ je **funkcí exponenciálního řádu s indexem růstu ξ_1** , jestliže bod $+\infty$ je hromadným bodem jejího definičního oboru a jestliže existují reálná čísla t_0 a $M > 0$ taková, že nerovnost

$$|f(t)| \leq M e^{\xi_1 t}$$

platí pro všechna $t > t_0$, pro která je $f(t)$ definována.

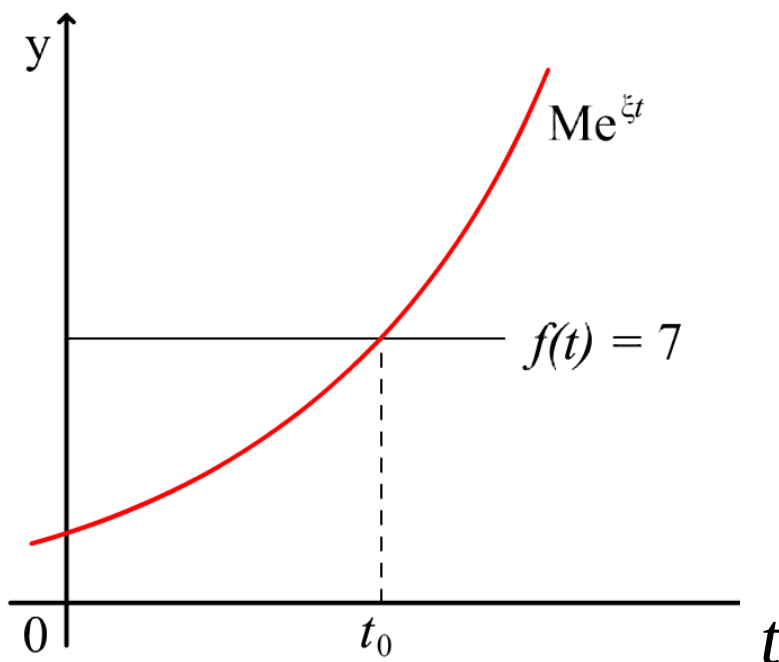
Zapisujeme:

$$f(t) = \mathcal{O}(e^{\xi_1 t})$$

PŘEDMĚT STANDARDNÍHO TYPU

Příklad **konstantní funkce** a její exponenciální řád

$$|f(t)| \leq 7e^{0 \cdot t} \quad f(t) = \mathcal{O}(e^{0 \cdot t})$$



PŘEDMĚT STANDARDNÍHO TYPU

Poznámka:

Je-li číslo ξ_1 indexem růstu funkce f , potom také každé $\xi_1' > \xi_1$ je jejím indexem růstu.

Každá funkce exponenciálního řádu má tedy nekonečně mnoho indexů růstu. Zpravidla používáme nejmenší z nich, pokud existuje.

Příklady funkcí exponenciálního řádu:

- a) Každá funkce ohraničená (definovaná pro všechna dostatečně velká t) je exponenciálního řádu s indexem růstu 0.
- b) Funkce e^{at} , a reálné, je exponenciálního řádu s indexem růstu a .
- c) Funkce t^n , n nezáporné, je exponenciálního řádu a jejím indexem růstu je každé kladné číslo.

PŘEDMĚT STANDARDNÍHO TYPU

Definice 6

Komplexní funkce $f(t)$ reálné proměnné t se nazývá **předmět standardního typu**, má-li tyto tři vlastnosti:

1. Je po částech spojitá na intervalu $\langle 0, +\infty \rangle$.
2. Je exponenciálního řádu.
3. Rovná se nule pro všechna $t < 0$.

VĚTA O EXISTENCI LAPLACEOVA OBRAZU

Věta 1

Nechť $f(t)$ je předmět standardního typu (PST) a ξ_1 index jeho růstu. Potom Laplaceův obraz

$$F(p) = \mathcal{L} \{ f(t) \} = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt$$

existuje a jeho definiční integrál konverguje absolutně pro všechna komplexní p , pro něž $\operatorname{Re} p > \xi_1$. Můžeme tedy říci, že Laplaceův obraz je definován v polorovině $\operatorname{Re} p > \xi_1$.

Poznámka: Předpokladem věty je podmínka postačující, nikoli podmínka nutná a postačující. Existují tedy i funkce, které mají Laplaceův obraz, ale nejsou PST.

VĚTA O LINEARITĚ LT

Věta 2

Nechť $f_i(t)$ jsou PST a $F_i(p)$, $i = 1, 2, 3, \dots, n$ odpovídající Laplaceovy obrazy. Nechť a_i jsou libovolné komplexní konstanty.

Potom pro všechna komplexní čísla p , pro která jsou definovány současně všechny $F_i(p)$, platí

$$\mathcal{L} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i f_i(t) \right\} = \sum_{i=1}^n a_i F_i(p)$$

Důkaz plyne z věty o linearitě integrálu.

Pozor!

Věta platí jen pro součet **konečného** počtu členů. V opačném případě se jedná o řadu a bylo by třeba doplnit další podmínky.

LINEARITA LT - PŘÍKLADY

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{3 - 5\sin t + 2e^{3t}\} &= 3\mathcal{L}\{1\} - 5\mathcal{L}\{\sin t\} + 2\mathcal{L}\{e^{3t}\} = \\ &= 3\frac{1}{p} - 5\frac{1}{p^2 + 1} + 2\frac{1}{p - 3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{-4 + 7e^{2t} - 3\cos t\} &= -4\mathcal{L}\{1\} + 7\mathcal{L}\{e^{2t}\} + 3\mathcal{L}\{\cos t\} = \\ &= -4\frac{1}{p} + 7\frac{1}{p - 2} - 3\frac{p}{p^2 + 1}\end{aligned}$$

VĚTA O POSUNUTÍ V OBRAZU

Věta 3

Nechť $f(t)$ je předmět standardního typu, $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(p)$ a necht' a je komplexní konstanta. Potom:

$$\mathcal{L}\{e^{at} \cdot f(t)\} = F(p - a)$$

Důkaz: Funkce $f(t)$ i funkce e^{at} jsou předměty standardního typu (PST), jejich součin je tedy také PST.

Platí:

$$\mathcal{L}\{e^{at} \cdot f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t) e^{at} e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} f(t) e^{-(p-a)t} dt = F(p - a)$$

což jsme měli dokázat.

Poznámka: Vynásobíme-li předmět výrazem e^{at} , pak v obrazu všude nahradíme p výrazem $p - a$.

POSUNUTÍ V OBRAZU - PŘÍKLAD

$$\mathcal{L}\{e^{at} \cdot f(t)\} = F(p-a)$$

Laplaceův obraz funkce $e^{-5t} \cdot 1$.

$$\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{p} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}\{e^{-5t} \cdot 1\} \stackrel{p \rightarrow p+5}{=} \frac{1}{p+5}$$

Laplaceův obraz funkce $e^{3t} \cdot \sin t$

$$\mathcal{L}\{\sin(t)\} = \frac{1}{p^2 + 1} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}\{e^{3t} \sin t\} \stackrel{p \rightarrow p-3}{=} \frac{1}{(p-3)^2 + 1}$$

VĚTA O DERIVACI OBRAZU

Věta 4 Necht' $f(t)$ je předmět standardního typu, $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(p)$.

Potom:

$$\mathcal{L}\{t \cdot f(t)\} = -F'(p) = -\frac{d}{dp}(F(p))$$

Poznámka: Funkce $t \cdot f(t)$ je také předmětem standardního typu, větu o derivaci obrazu můžeme použít i na funkci $t \cdot f(t)$.

$$\mathcal{L}\{t \cdot t \cdot f(t)\} = -\frac{d}{dp} \mathcal{L}\{t \cdot f(t)\} = \frac{d^2}{dp^2}(F(p))$$

indukcí lze odvodit vztah

$$\mathcal{L}\{t^n \cdot f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{dp^n}(F(p)), n \text{ přirozené číslo.}$$

DERIVACE OBRAZU - PŘÍKLADY

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{p-a}$$

$$\mathcal{L}\{t e^{at}\} = -\frac{d}{d p} \left(\frac{1}{p-a} \right) = \frac{1}{(p-a)^2}$$

$$\mathcal{L}\{\sin t\} = \frac{1}{p^2+1}$$

$$\mathcal{L}\{t \sin t\} = -\frac{d}{d p} \left(\frac{1}{p^2+1} \right) = \frac{2p}{(p^2+1)^2}$$

$$\mathcal{L}\{\cos t\} = \frac{p}{p^2+1}$$

$$\mathcal{L}\{t \cos t\} = -\frac{d}{d p} \left(\frac{p}{p^2+1} \right) = \frac{p^2-1}{(p^2+1)^2}$$

VĚTA O ZMĚNĚ MĚŘÍTKA

Věta 5

Nechť $f(t)$ je PST, $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(p)$ a nechť k je kladná konstanta. Potom funkce $g(t) = f(kt)$ je také PST a platí

$$\mathcal{L}\{g(t)\} = \mathcal{L}\{f(kt)\} = \frac{1}{k} F\left(\frac{p}{k}\right)$$

Analogicky platí

$$\mathcal{L}\left\{f\left(\frac{t}{k}\right)\right\} = k F(kp)$$

VĚTA O ZMĚNĚ MĚŘÍTKA - PŘÍKLADY

Určíme obrazy e^{kt} , $\cos kt$, $\sin kt$, $k > 0$.

$$\mathcal{L}\{e^t\} = \frac{1}{p-1} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}\{e^{kt}\} = \frac{1}{k} \frac{1}{\frac{p}{k}-1} = \frac{1}{p-k}.$$

$$\mathcal{L}\{\cos t\} = \frac{p}{p^2+1} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}\{\cos kt\} = \frac{1}{k} \frac{\frac{p}{k}}{\left(\frac{p}{k}\right)^2+1} = \frac{p}{p^2+k^2}.$$

$$\mathcal{L}\{\sin t\} = \frac{1}{p^2+1} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}\{\sin kt\} = \frac{1}{k} \frac{1}{\left(\frac{p}{k}\right)^2+1} = \frac{k}{p^2+k^2}.$$

VĚTA O INTEGRACI OBRAZU

Věta 6 Nechť $f(t)$ je PST exponenciálního řádu α , $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(p)$.

Nechť existuje vlastní limita $\lim_{t \rightarrow 0_+} \frac{f(t)}{t}$.

Potom

$$\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_p^\infty F(q) \, dq, \quad p > \alpha$$

Důkaz:

$$g(t) = \frac{f(t)}{t} \Rightarrow f(t) = t \cdot g(t)$$

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{L}\{f(t)\} &= F(p), & \mathcal{L}\{g(t)\} &= G(p), \\ \mathcal{L}\{f(t)\} &= \mathcal{L}\{t \cdot g(t)\} = -\frac{d}{dp} G(p) = -G'(p) \end{aligned} \right\} \Rightarrow -F(p) = G'(p)$$

funkce $G(p)$ je primitivní funkcí k funkci $-F(p)$

$$G(p) = \int_p^\infty -F(q) \, dq = \int_p^\infty F(q) \, dq, \quad p > \alpha$$

VĚTA O INTEGRACI OBRAZU- PŘÍKLAD

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(p)$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_p^\infty F(q) \mathrm{d}q, \quad p > \alpha$$

$$\mathcal{L}\{\sin t\} = \frac{1}{p^2 + 1}, \quad p > 0$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\sin t}{t}\right\} = ?$$

$$\lim_{t \rightarrow 0_+} \frac{\sin t}{t} = \left\{\frac{0}{0}\right\} = \lim_{t \rightarrow 0_+} \frac{\cos t}{1} = 1$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\sin t}{t}\right\} = \int_p^\infty \frac{1}{q^2 + 1} \mathrm{d}q = [\operatorname{arctg} q]_p^\infty = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} p$$

VĚTA O OBRAZU DERIVACE

Věta 7

Nechť $f'(t)$ je PST exponenciálního řádu α , $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(p)$.

Potom

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = pF(p) - f(0_+), \quad p > \max(0, \alpha)$$

Důkaz:

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = \int_0^{\infty} f'(t) e^{-pt} dt = \left| \begin{array}{ll} u = e^{-pt} & u' = -p e^{-pt} \\ v' = f'(t) & v = f(t) \end{array} \right| =$$

$$\left[e^{-pt} f(t) \right]_0^{+\infty} - \int_0^{\infty} p f(t) e^{-pt} dt = 0 - f(0_+) + p \mathcal{L}\{f(t)\}$$

VĚTA O OBRAZU DERIVACE

Důsledek věty 7

Nechť $f^{(n)}(t)$ je PST exponenciálního řádu α , $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(p)$.

Potom pro $p > \max(\alpha, 0)$ platí

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = p^n F(p) - p^{n-1} f(0_+) - p^{n-2} f'(0_+) - \dots - p f^{(n-2)}(0_+) - f^{(n-1)}(0_+)$$

Důkaz: lze provést matematickou indukcí.

Poznámka:

Větu o derivaci obrazu a jejího důsledku používáme k řešení Cauchyovy úlohy pro lineární obyčejné diferenciální rovnice.

ZPĚTNÁ LAPLACEOVA TRANSFORMACE

Zpětná LT není jednoznačná. Z definice LT vyplývá, že dvě funkce, které se liší jen v konečném počtu bodů, mají stejný integrál.

Za předpokladu, že tyto funkce jsou PST a jejich hodnota v bodech nespojitosti t je rovna aritmetickému průměru limity zleva a zprava, tj.

$$f(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \frac{f(t + \varepsilon) + f(t - \varepsilon)}{2}.$$

platí **Lerchova věta** (o jednoznačnosti).

Zjednodušeně řečeno:

K danému obrazu $F(p)$ existuje nejvýše jeden předmět standardního typu $F(t)$ uvedené vlastnosti, který má Laplaceův obraz $\mathcal{L}(f(t)) = F(p)$.

Tento předmět označujeme takto: $\mathcal{L}^{-1}F(p)$.

Poznámka: pro zpětnou LT platí analogická tvrzení jako pro LT.

ZPĚTNÁ LT RACIONÁLNÍ FUNKCE

Věta 8

K tomu, aby racionální funkce $F(p)$ byla Laplaceovým obrazem obrazem předmětu standardního typu **je nutné a stačí**, aby **stupeň čitatele byl nižší než stupeň jmenovatele**, tedy aby $F(p)$ byla ryze racionální funkcí.

Jak určit předmět k ryze racionální funkci?

Rozkladem této funkce na parciální zlomky a použití zpětné Laplaceovy transformace na jednotlivé parciální zlomky.

ZPĚTNÁ LT PŘÍKLAD

Určete předmět k Laplaceovu obrazu $F(p) = \frac{p+2}{p^3-p}$.

$$F(p) = \frac{p+2}{p^3-p} = \frac{p+2}{p(p+1)(p-1)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p+1} + \frac{C}{p-1}$$

$$\Rightarrow A = -2, \quad B = \frac{1}{2}, \quad C = \frac{3}{2}$$

$$F(p) = -2 \frac{1}{p} + \frac{1}{2} \frac{1}{p+1} + \frac{3}{2} \frac{1}{p-1}$$

$$\begin{aligned} f(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{F(p)\} = -2 \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p}\right\} + \frac{1}{2} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p+1}\right\} + \frac{3}{2} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p-1}\right\} = \\ &= -2 \cdot 1 + \frac{1}{2} e^{-t} + \frac{3}{2} e^t \end{aligned}$$

VĚTA O OBRAZU DERIVACE - PŘÍKLAD

Dána rovnice $y' + 2y = 4$, s počáteční podmínkou $y(0+) = 1$

Laplaceův obraz jednotlivých členů diferenciální rovnice

$$y(t) \triangleq Y(p), \quad y'(t) \triangleq pY(p) - y(0+) = pY(p) - 1, \quad 4 \triangleq \frac{4}{p}$$

Laplaceův obraz dané diferenciální rovnice:

$$pY(p) - 1 + 2Y(p) = \frac{4}{p}$$

Určení funkce $Y(p)$ – obrazu řešení úlohy $y(t)$

$$(p+2)Y(p) - 1 = \frac{4}{p} \Leftrightarrow (p+2)Y(p) = \frac{4}{p} + 1 \Leftrightarrow Y(p) = \frac{5+p}{p(p+2)}$$

Rozklad funkce na parciální zlomky:

$$Y(p) = \frac{4+p}{p(p+2)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p+2} = \frac{2}{p} + \frac{-1}{p+2} \Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\{Y(p)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{p} + \frac{-1}{p+2}\right\} = 2 - e^{-2t}$$

Řešením Cauchyovy úlohy $y' + 2y = 4$, $y(0+) = 1$ je funkce $y(t) = 2 - e^{-2t}$

ŘEŠENÍ CÚ PRO LINEÁRNÍ ODR S KK - PŘÍKLAD

$$y'' + y = \cos t, \quad p.p. \quad y(0+) = -1, \quad y'(0+) = 1$$

$$y(t) \triangleq Y(p), \quad \cos t = \frac{p}{p^2 + 1}$$

$$y''(t) \triangleq p^2 Y(p) - p y(0+) - y'(0+) = p^2 Y(p) + p - 1$$

$$p^2 Y(p) + p - 1 + Y(p) = \frac{p}{p^2 + 1}$$

$$(p^2 + 1)Y(p) = \frac{p}{p^2 + 1} - p + 1$$

$$Y(p) = \frac{p}{(p^2 + 1)^2} - \frac{p - 1}{p^2 + 1} = \frac{p}{(p^2 + 1)^2} - \frac{p}{p^2 + 1} + \frac{1}{p^2 + 1}$$

$$Y(p) = -\frac{1}{2} \frac{-2p}{(p^2 + 1)^2} - \frac{p}{p^2 + 1} + \frac{1}{p^2 + 1} \Rightarrow y(t) = -\frac{1}{2} t \sin t - \cos t + \sin t$$

VĚTA O OBRAZU INTEGRÁLU

Věta 9 Nechť $f(t)$ je PST exponenciálního řádu α , $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(p)$.

Potom

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(u) \mathrm{d}u\right\} = \frac{F(p)}{p}, \quad p > \max(0, \alpha).$$

Důkaz: $g(t) = \int_0^t f(u) \mathrm{d}u \Rightarrow \mathcal{L}\{g(t)\} = \mathcal{L}\left\{\int_0^t f(u) \mathrm{d}u\right\} = G(p)$

$$g'(t) = f(t), \quad g(0_+) = \int_0^0 f(u) \mathrm{d}u = 0$$

$$F(p) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{g'(t)\} = pG(p) - g(0_+) = pG(p)$$

$$G(p) = \frac{F(p)}{p}$$

VĚTA O OBRAZU INTEGRÁLU- PŘÍKLAD

Řešte integrální rovnici:

$$x(t) - 2 \int_0^t x(u) du = \sin t$$

$$x(t) \triangleq X(p), \quad \int_0^t x(u) du \triangleq \frac{X(p)}{p}, \quad \sin t = \frac{1}{p^2 + 1}$$

Laplaceův obraz integrální rovnice:

$$X(p) - 2 \frac{X(p)}{p} = \frac{1}{p^2 + 1}$$

$$X(p) \left(1 - \frac{2}{p} \right) = \frac{1}{p^2 + 1} \Rightarrow X(p) \left(\frac{p-2}{p} \right) = \frac{1}{p^2 + 1} \Rightarrow X(p) = \frac{p}{(p^2 + 1)(p-2)}$$

$$X(p) = \frac{A}{p-2} + \frac{Bp+C}{p^2+1} \Rightarrow X(p) = \frac{\frac{2}{5}}{p-2} + \frac{-\frac{2}{5}p}{p^2+1} + \frac{\frac{1}{5}}{p^2+1}$$

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\frac{2}{5}}{p-2} + \frac{-\frac{2}{5}p}{p^2+1} + \frac{\frac{1}{5}}{p^2+1} \right\} = \underline{\underline{\frac{2}{5}e^{2t} - \frac{2}{5}\cos t + \frac{1}{5}\sin t = x(t)}}$$

Integrální rovnici lze převést na úlohu s diferenciální rovnicí. Původní rovnici nejprve zderivujeme a doplníme o příslušnou počáteční podmínku:

$$x(t) - 2 \int_0^t x(u) \, du = \sin t \quad \rightarrow \quad x'(t) - 2x(t) = \cos t, \quad x(0) = 0$$

$$\text{Laplaceův obraz dif. rce: } pX(p) - x(0_+) - 2X(p) = \frac{p}{p^2 + 1}$$

$$X(p)(p - 2) = \frac{p}{p^2 + 1} \quad \Rightarrow \quad X(p) = \frac{p}{(p^2 + 1)(p - 2)}$$

$$X(p) = \frac{A}{p - 2} + \frac{Bp + C}{p^2 + 1} \quad \Rightarrow \quad X(p) = \frac{\frac{2}{5}}{p - 2} + \frac{-\frac{2}{5}p}{p^2 + 1} + \frac{\frac{1}{5}}{p^2 + 1}$$

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\frac{2}{5}}{p - 2} + \frac{-\frac{2}{5}p}{p^2 + 1} + \frac{\frac{1}{5}}{p^2 + 1} \right\} \quad \Rightarrow \quad x(t) = \frac{2}{5} e^{2t} - \frac{2}{5} \cos t + \frac{1}{5} \sin t$$

VĚTA O OBRAZU INTEGRÁLU- PŘÍKLAD

Řešme integro - diferenciální rovnici

$$x' - 4x + 3 \int_0^t x(u) du = 2e^t, \quad \text{p.p. } x(0_+) = -1$$

$$x(t) \triangleq X(p), \quad x'(t) \triangleq pX(p) + 1, \quad \int_0^t x(u) du = \frac{X(p)}{p}, \quad e^t = \frac{1}{p-1}$$

Laplaceův obraz integro-diferenciální rovnice

$$pX(p) + 1 - 4X(p) + 3 \frac{X(p)}{p} = 2 \frac{1}{p-1} \Rightarrow X(p) \left(p - 4 + \frac{3}{p} \right) = \frac{2}{p-1} - 1$$

$$X(p) \left(\frac{p^2 - 4p + 3}{p} \right) = \frac{-p + 3}{p-1} \Rightarrow X(p) = \frac{-p}{(p-1)^2}$$

$$X(p) = \frac{-1}{p-1} + \frac{-1}{(p-1)^2} \Rightarrow \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{-1}{p-1} + \frac{-1}{(p-1)^2} \right\} = -1e^t - te^t$$

ŘEŠENÍ CAUCHYOVY ÚLOHY PRO LINEÁRNÍ DIF. ROVNICI 2. ŘÁDU S KONSTANT. KOEFICIENTY - PŘÍKLAD

$$y''(x) + 5y'(x) + 6y(x) = 4e^{-x}, \quad p.p. \quad y(0+) = 0, \quad y'(0+) = 0$$

$$p^2 Y(p) - p \cdot y(0+) - y'(0+) + 5(pY(p) - y(0+)) + 6Y(p) = \frac{4}{p+1}$$

$$(p^2 + 5p + 6)Y(p) = \frac{4}{p+1}$$

$$(p+2)(p+3)Y(p) = \frac{4}{p+1}$$

$$Y(p) = \frac{4}{(p+1)(p+2)(p+3)} \Rightarrow Y(p) = \frac{A}{p+1} + \frac{B}{p+2} + \frac{C}{p+3}$$

$$Y(p) = 2 \frac{1}{p+1} - 4 \frac{1}{p+2} + 2 \frac{1}{p+3} \Rightarrow y(t) = 2e^{-x} - 4e^{-2x} + 2e^{-3x}$$